上越数学教育研究，第 23 号，上越教育大学数学教室, 2008 年, pp.93-104.

単位量あたりの大きさの概念形成における記号論的連鎖に関する研究

稲田　直人

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

異種の 2 つの量の割合の指導について，現在の小学校学習指導要領解説算数編では「異種の二つの量の割合としてとらえられる数量について，その比べ方や表し方を理解し，それを用いることができるようにする」(文部科学省,1999,p.156)とし，また単位量あたりの考えについては「二つの量の組み合わせによらなければとらえることができない量があることを知らせる」（文部科学省,1999,p.156)と書かれている。教科書では，単位量あたりの大きさを理解するために，情景図や表，二重数直線やテープ図，線分図等の様々な表現が利用されているが，割り算で得られた結果が何を表しているか，なぜ割り算をするのか，異種の 2 量のどちらで割り算をすればよいのか，割合と基準量と比較量にあたるものが何かなど，単位量あたりの大きさの概念を理解することは難しい。その上，その理解を助けるはずの数直線の意味さえも理解できない子どもは少なくないと思われる。

本研究は，情景図から単位量あたりの大きさの意味を表す割り算の式までの表現において，子どもの思考がつながりうるかを問い直すことからはじめてみたい。例えば，教科書には現実的場面の絵に引き続いて，人数と面積の表が記述してあるが，子どもがこみぐあいを比べる際には，人数だけに着目しやすい傾向があるため（新堀,2000），この間を媒介する表現がありうるかは,研究上の一つの問題となろう。さらに，表や図から，単位量あたりの大きさを求める式へは，子どもにとって，表現と思考のつながりにギャップがあることはよく知られている。

そこで，本稿では，単位量あたりの大きさの概念を形成していく上で，どのように表現が結びつき,連なっていくかを吟味したいと考える。そのために，中原の表現体系，Saenz-Ludlow や Presmeg の記号論的連鎖の視点に着目して，その視点から学習過程が，どのように成立し得るかを明らかにすることを目的とする。

2. 表現について

2.1. 中原の表現体系

中原（1995）は，算数・数学教育の授業における様々な表現様式を以下の 5 つに類型化し，それに基づいて表現体系を構築した。

（1）現実的表現

実世界の状況，実物による表現。具体物や実物による実験など。

（2）　操作的表現

具体的な操作的活動による表現。人為的加工，モデル化が行われている具体物，教具等に動的操作を施すことによる表現。

（3）　図的表現

絵，図，グラフ等による表現。

（4）　言語的表現

日本では日本語,米国・英国では英語など,各国の日常言語を用いた表現。

（5）　記号的表現

数字，文字，演算記号，関係記号など数学記号を用いた表現。

中原（1995）は，これらの 5 つの表現様式を体系化して表現体系として次の図 2.1 のように表している。

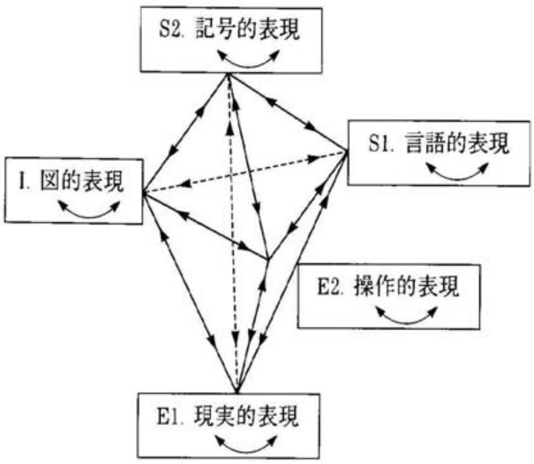


図 2.1.　数学教育における表現体系.

中原の示す表現体系の（1）から（5）は順に抽象レベルの高い表現となっていく。(1)から（5）の表現は,それぞれ孤立したものではなく，図 2.1 の矢印が相互に向き合っていることからも分かるように互いに関係しあっている。単位量あたりの大きさの単元において表現様式のつながりに着目し,(1)から(5)を教科書において考えると，（1）は単元導入の問題場面である扉絵や現実的場面の写真などがあたると考えられる。しかし，（2）の操作的表現につながるような表現，つまり実際に 2 つの異なる量の操作をする場面などといった明確に操作的表現であるといえるものは記載されていない。(3）は，人数や面積の表であり,(4)の言語的表現は単位量あたりを,(基にする量)÷（比べる量）=(割合)と表現すること，（5）の記号的表現は単位量あたりの式に相当すると考えられる。しかし，これらが十分につながっているかは，検討の余地がある。つまり，中原の表現体系には，同じ表現間での変換，以前のものへもどるプロセスなども想定されており，これらを総合的に検討していかねばならないであろう。

中原（1995）は「数学教育においては「具体的状況」と関連させて問題が提示され，それを子どもに処理可能な「表現」で表し，その表現を「操作」することで概念構成や問題解決がなされ,「抽象的状況」へとまとめられる」（p.216）と述べており，また「操作的表現は,「指示するもの（能記)」と「指示されるもの（所記)」という二重の機能を担って，現実的表現と記号的表現の媒介を果たしている」(p.217)と述べているように，具体的状況である現実的場面からつながるプロセスである操作的表現を通して，より抽象性が高い記号的表現へと連続的なプロセスを形成すると思われるので，本研究では，この操作的表現の役割に注目していきたい。

また，図的表現は，①「現実的状況と学習内容との関連を図るもの」,②「問題解決のてがかり，方法を示すもの」,③「学習内容を効果的に示すもの」の 3 つの役割があり，中原（1995）は，最も重要な役割として③の役割と述べている。「能記性－所記性」は，図的表現においても所記間の類似性において成り立ち，単位量あたりの大きさの単元においても表現体系のように表現のつながりについて考え，どのような表現や操作，図が問題の理解に影響を与えており，どのように表現様式がつながっていくのかを調べていく必要があると考える。

2.2. 記号論的連鎖

Saenz-Ludlow(2006)は「数学の学習は他人とのコミュニケーションを通して，数学的記号の解釈と，数学的な意味の構成の双方を伴

う」(p.183)と述べている。また「複数の記号論のシステム（例えば，言語，数学的な記号，ジェスチャー）を，数学的な意味の連続的で進化している解釈を確立することと結合する」(p.183)としている。すなわち，数学の学習では他人とのコミュニケーションによって数学的記号の解釈と，数学的な意味を構成することができ，それには複数の記号論のシステム（言語，数学的な記号，ジェスチャー）が関わっている。

また，Saenz-Ludlow(2006)は「記号解釈と記号の使用が本質的に連続的で進化的な「解釈ゲーム」である。」(p.186)と述べており，解釈ゲームは Perice の提唱する,「対象」,「記号」,「解釈項」の 3 つ組の連続的な関係を基底として，定義されている。さらに,「構成された数学的意味は，新しい記号に翻訳される時，解釈項の連続的進化において一般化される傾向がある。この連続体の領域で、すべての解釈項は訂正、修正するプロセスの中で構成されて、新しい記号（例えば、言葉と書くことによる議論と表現，図，絵，ジェスチャーなど）の中で表現された」(p.191)と述べている。すなわち，解釈項の連続的進化が，新しい記号の中で表現され，数学的意味が一般化されていくとしている。

また Presmeg（2006）は「記号論の枠組み，記号論の連鎖の使用は，重要な連鎖のプロセスを通して，明白なギャップを越えるための橋渡しの能力を持つ」(p.164)と述べ，さらに「教師によって構想される計画的な連鎖プロセスが実行されなかったとき，異なる数学的な知識をつなぐプロセスは壊れた」(p.182)と述べている。すなわち，教師による計画的な記号論の連鎖が，連鎖していけるものであるならば，数学的な知識をつなぐプロセスへの橋渡しを可能にすることができる。

Presmeg（2006）の入れ子式記号論的連鎖のモデルは「記号内容」と「記号表現」,「解釈項」から成り立っており，図 2.2 として表される。このモデルは記号内容 1 から始まり，記号内容 1 から記号表現 1 を表現し，表現することによって，記号表現から読み取れる内容の解釈を解釈項 1 とする。次に，記号内容 1 と記号表現 1 と解釈項 1 の 3 つを 1 つとみて，図 2.2 では一番小さい四角で囲まれたものすべてを記号内容 2 として，記号表現 2 を表現し，それから解釈したものを解釈項 2 とする。同様に記号表現 2 までのプロセスを記号内容 3 として，新たな記号表現 3 を表現して表現からの解釈を解釈項 3 とする。このように表現が段階を重ねて高度になり，表現の連鎖を考えるのが Presmeg のモデルである。

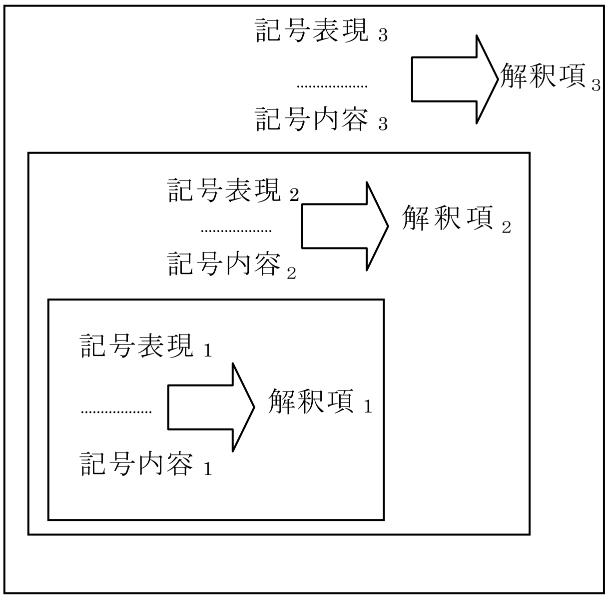


図 2.2.　Presmeg の入れ子式記号論的連鎖のモデル.

具体例をあげると，マウンテンバイクのギアと，ギアによって進む距離の関係を考える問題で，記号内容 1 となるのはマウンテンバイクの絵や図である。その記号内容 1 から，マウンテンバイクの進む距離に関係するギアだけを考えようと表現したギア図(図 2.3)が記号内容 1 に対する記号表現 1 となり，表現したギア図からギアが，進む距離と関係があることを解釈するのが解釈項 1 となる。

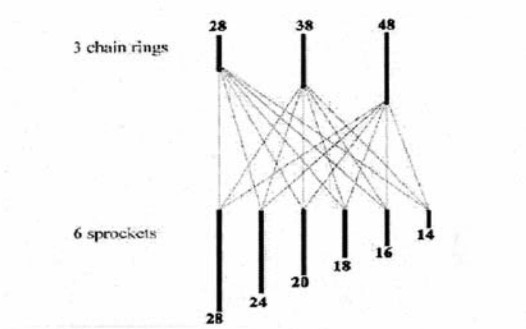


図 2.3. ギア図.

この記号内容 1 から解釈項 1 まですべてを記号内容 2 として進んだ距離を解釈していくプロセスで，チェーンリングと後輪のスプロケットで歯の実際の関係のギア比を考え，ギア比を表現したものが図 2.4 であり，表現したギア比を関数的にとらえればよいと解釈するのが記号内容 2 と記号表現 2 に対する解釈項 2 である。そして，記号表現 2 までのプロセスすべてを記号内容 3 として，グラフで表現すると，それが記号表現 3 となり，関数的に表現されたギア比を読みとることが解釈項 3 となる。

n	Gear Ratio 48/2n	Gear Number (48/2n)×26	Development (48/2n)×π ×(26/12)
1	48/2	624	163.28
2	48/4	312	81.64
3	48/6	208	54.43
4	48/8	156	40.84
5	48/10	125	32.66
6	48/12	104	27,21
7	48/14	89	23.32
8	48/16	78	20.41
9	48/18	69	18.14
10	48/20	62	16.33
11	48/22	57	14.83
12	48/24	52	13.61
13	48/26	48	12.56
14	48/28	44	11.66
15	48/30	41	10.89
16	48/32	39	10.21
17	48/34	37	9.60
18	48/36	35	9.07
19	48/38	33	8.59
20	48/40	31	8.16
21	48/42	30	7.77
22	48/44	28	7.42
23	48/46	27	7.01
24	48/48	26	6.80

図 2.4. ギア比を関数的に捉えた図.

記号内容を表現することにより，新しい「何か」を解釈することができ，それを基にまた新たな表現を生み，解釈していくことを繰り返して数学的な知識をつなぐことができるというのが Presmeg(2006)の考えである。本稿では，単位量あたりの大きさにおいて，この記号論的連鎖に着目して，学習過程を想定していく。

3. 単位量あたりの大きさの内容とその理解を促す表現

3.1. 単位量あたりの大きさの内容と子どもの意味づけについて

田端（2003）は，割合の指導を図 3.1 のように整理している。田端は，異種の量の割合も同種の量の割合もステップ①と②までは同じであり，異種の量の割合と同種の量の割合とでは，ステップ③が大きく異なる点であり，同種の割合のほうが，子どもの理解が困難であると述べている。しかし，現在の学習指導要領では，同種の量の割合を異種の量の割合よりも先に指導することになっており，田端は③のステップが介在する異種の量の割合を，同種の量の割合よりも先に指導すべきであり，学習目標の設定をどこにすればよいか，検討する必要があると主張している。

異種の量の割合では①と②を指導する観点としてとらえることができる。特に②の観点である「一方を単位量として他方で数値化する」考え方は，同種の量の割合よりも異種の量の割合のほうが顕著に表れると考える。

同種の量の割合の例として，バスケットなどのシュート数と成功数のシュートのうまさを比べる問題がある。この問題で②の観点では，シュート 1 本あたり何本成功するのかを考える。そうした場合，1 本あたり 0.8 本成功するといった数値となり，0.8 本という視覚的にとらえることのできない数値を考えることになる。この場合，シュート数に対するシュートの成功数の割合なので，割合の数値が 1 以下になる。異種の量の割合の場合は，一方を単位量として考えた場合，例えば，人口密度の問題では $1\mathrm{m}^2$ あたりに何人かを考える

ため，取り扱う数値によって現実的な場面と結びつけることができると考える。単位量あたりの大きさでは，観点①と特に観点②を学習内容としたい。

異種の量の割合

①一方の数量をそろえて他方で比較する。 ・公倍数の考え方　・平均の考え
②一方を単位量として他方で数値化する。 ・等分除的解釈　・単位量あたりの考え

同種の量の割合

①一方の数量をそろえて他方で比較する。 ・公倍数の考え方　・平均の考え
②一方を単位量として他方で数値化する。 ・等分除的解釈　・単位量あたりの考え
③一方（全体）を 1 とみて他方を測定して数値化する。 ・包含除的解釈　・測定の考え

図 3.1. 田端（2003）による割合指導.

数学的表記の内化の過程について考察をしている日野(1997a)は，異種の量の除法における数学的表記に着目し，子どもの知識構成の様相をまとめている。ここでいう内化とは，「数学的表記を知り，自由かつ効果的に使うこと」(p.2)を指す。日野（1997b）は，異種の量の除法を示す表記の意味づけを異なる特徴の表記との相互作用を通して知識の再構成ができない場合，原因の 1 つとして「比例的推論の未熟さ」を挙げている。比例的推論が未熟であれば，異種の量の除法に関わる数学的表記の意味づけに支障があり，教師が期待する解釈を行うことができないと述べている。原因の 2 つ目として，立式について自分自身の方法をあまり自覚することなく，計算することについて「手続きへの関心は，「a÷b」を使うために問題を適切に表象する仕方を学ぶ目標の意識化を阻んでいたと考えられる」(p.162)と述べている。筆者も異種の量の除法に関する数学的表記の意味づけには，比例的推論が重要になり，表記の意味づけを促す必要があると考える。日野（1997b）の研究から，異種の量の割合を理解するためには，比例的推論が重要なカギとなり，また計算の手続きに関心をよせるのではなく，子ども自身が表記したものへの意味づけを考えることが重要であると考える。

しかし，筆者は数直線や式に直接焦点をあてるのではなく，問題場面から子どもがどのように表現を生成し，意味づけ，表現をつなげていくかを考える。そのプロセスの中で，数直線の使用の前後のプロセスを特に着目していきたい。

3.2. 数直線について

柳（2007）は，図的表現を介した授業のあり方について考察している。柳は，「子どもが自由にかく図であろうとも，教師の側から与える図であろうとも図的表現を子どもがどのようにとらえているかを見極めることで，教師が次にどのような手を打つべきかを決定することができる」（p.100）と述べており，図的表現に対して，子どものする意味づけが重要であるとしている。榎園（1983）は，数直線を用いて乗法の意味を拡張する際，数量の関係が比例のイメージでとらえられるようにしたいと考え，1 リットル 165 円のガソリン 3.6 リットルの代金を求める式を数直線と対応させて，図 3.2 のような数直線で対応関係をとらえようとした。

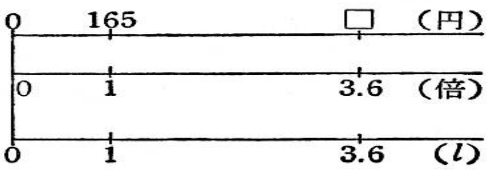


図 3.2.　榎園の数直線の利用法.

また白石（2005）は数直線について「数直線に比例的な見方を操作することで，比例的推論が促され，その発達した比例的推論を数直線に持ち込み，操作することによって，数直線への比例的な見方をより効果的なものにしていく」(p.166)としている。

本稿では，表現の連鎖として二重数直線を使用して，割合の概念形成に表現の連鎖の学習過程が有効な手立てと成り得るのかを考えたい。よって，場面から操作を活かしながら，二重数直線につながるプロセスを考え，その結果，割合の概念形成にどのような影響を及ぼすのかを検証していきたい。

4．単位量あたりの大きさと理解を促す記号論的連鎖

4.1．ベースとなる先行研究

本稿では新堀（2000）の研究事例をベースに，単位量あたりの大きさの概念形成過程を考えていく。新堀は，平林（1985）の考えを引き合いに出し，それを基本コンセプトの一つにしている。

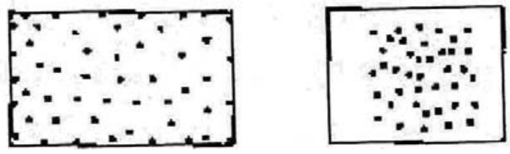
「数学的概念も，何らかの矛盾・葛藤を解消する道具としてつくれてくる。まず，問題事態の矛盾・葛藤が明確に浮き彫りにされなければならない。」（平林，1985）

つまり，何らかの問題を解決するための道具として数学的概念が形成され，そのためには矛盾・葛藤が必要であると述べている。さらに，問題の核心を明確にする必要性を以下のように述べている。

① 異なる 2 つの量があって，どちらか一方では比べられないという状況があること
② どちらか一方を揃えなければならないこと
③ 揃える量は任意でよいこと

①は例えば，こみぐあいを比べる問題で異種の 2 つの量である人数と面積のどちらの数値も比べる対象において数値が異なる場合である。異種の 2 つの量が異なる数値である場合，人数に着目しても面積に着目しても，こみぐあいを比べることができないので,「どちらか一方では比べられないという状況があること」にあてはまる。新堀（2000）は事前調査の中で，子どもが葛藤を生じやすい場面をいくつかの場面の凡例を統計的に調査した上で，次の導入場面を提案した（図 4.1)。

あなたがこんでいるなぁと思うプールはどちらですか？



Aプール　　　　　　Bプール
400 ㎡　　　　　　320 ㎡
50 人　　　　　　　40 人

図 4.1．新堀（2000）の導入問題.

新堀は事前調査の結果をもとに，子どもが視覚的にこんでいると感じる図を用意し，矛盾･葛藤が起きるように導入場面を設定した。新堀（2000）が述べているように，筆者も問題の導入場面で子どもに矛盾･葛藤が起こり，それを解消していくプロセスの中で割合の概念がつくられていくと考えたい。問題を解決していく過程で教師側が身につけさせたい数学的概念と子どもたちの問題に対する矛盾･葛藤場面を解消していく過程を一致させることにより，子どもたちに「割合」の数学的概念が身につくのではないかと考える。新堀は③の「揃える量は任意でよいこと」は,「均等化」を経て，初めて形成される概念であったと述べ，③を実現させるためには，マスのある面積図と様々な大きさの面積を表す枠を用いることで，その枠をどこに置いても枠の中の人数が変わらないことを意識させることができ，子どもたちの理解が容易になったと述べている。新堀の行った調査の概要を，次頁の図 4.2 に示す。筆者は，この新堀の授業プ

ロセスは，事前調査から子どもが視覚的にこんでいると判断する図を準備して，子どもが困惑すると考えられるところに手立てをうち，子どもが操作を行いながら問題を解決するプロセスとなっていると考える。新堀はアイデアの発達の特徴的な 6 つの段階を見出しており，次頁に示す。6 つの段階が，シツエーションと教師の手立てによって高まったと述べている。

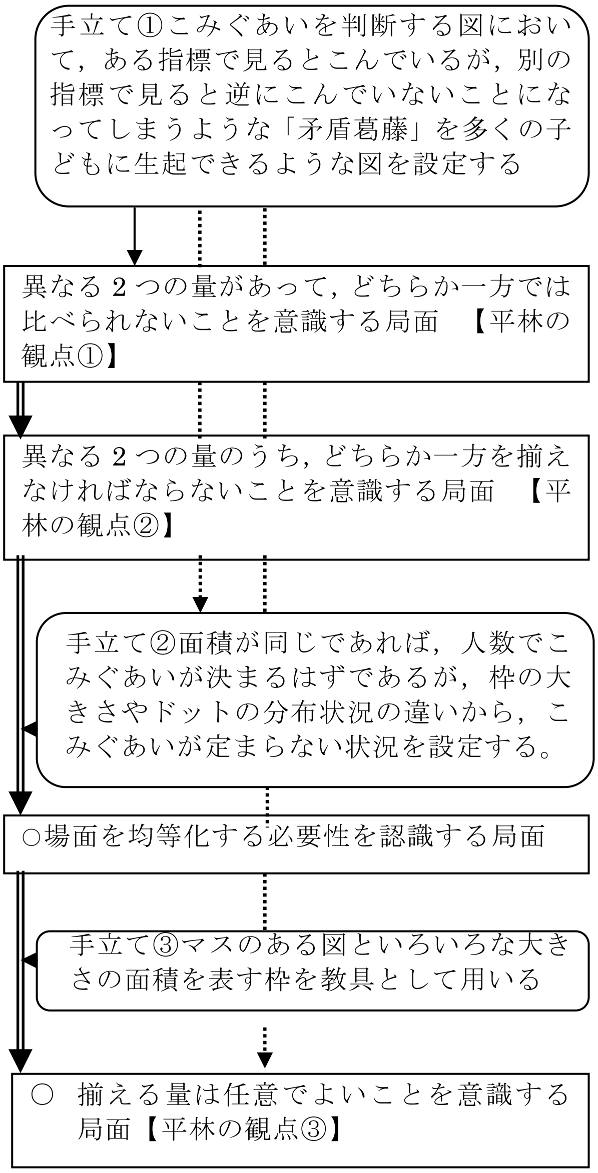


図 4.2.　新堀（2000）の授業プロセス.

Ⅰの段階　こみぐあいを「人数」だけでとらえる
Ⅱの段階　こみぐあいを「人数」と面積でとらえる
Ⅲの段階　こみぐあいを「面積」が同じ時に「人数」でとらえる
Ⅳの段階　場面を均等化して，こみぐあいを人数と任意の面積でとらえる
Ⅴの段階　こみぐあいを「人数」と単位量の「面積」でとらえる
Ⅵの段階　こみぐあいを「人数」÷「面積」の除法でとらえる

記号論的連鎖の立場から，子どもが操作をしながら理解を深めていく新堀（2000）の授業プロセスを参照し，そのプロセスに二重数直線を付加する内容で学習過程を想定する。

4.2. 学習過程の想定

記号論的連鎖に着目し，新堀（2000）の調査基本方針の観点を援用した学習過程の想定の概要について述べる。本調査は，3 つの場面設定より構成する。

第 1 の場は，新堀の研究に二重数直線使用を加味した場とする。第 2 の場は，分離量の問題から連続量の問題に発展させ，第 1 の場の操作を通して，図や二重数直線を活用することを目的とする場と位置づける。第 3 の場は，速さについての問題を設定し，第 1 の場と第 2 の場で使用してきた二重数直線を数学的道具として使用することができるかを検証する場として位置づける。

このように 3 つの場面設定によって段階的に二重数直線の活用をしていくことを考え，以下に学習過程の想定の内容を述べていく。

①こみぐあいの場面設定で,「プール」の場面を用いる

新堀（2000）の調査から，子どもたちが身近でこみぐあいを実感できる場所はプールであるという調査結果を受けて，本調査でも同様に，こみぐあいをプールの場面で導入場面を考える。また，矛盾・葛藤を起こすための

図として，図 4.3 のようなドットが均等された図と局所的にドットが集まった図を用いる。新堀の調査によれば，子どもは人数の多さによってこみぐあいを判断するのだが，視覚的には局所的にドットの集まったプールがこんでいると判断して，どちらがこんでいるか，わからなくなる状況がうまれることなることを期待する。

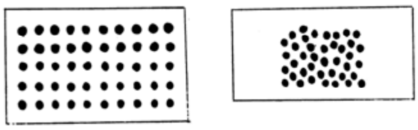


図 4.3. ドットが均等化な図と局所的な図.

②面積を意識させる教具を取り入れる

子どもは，こみぐあいを比べるときに，人数と面積では人数に着目して比べる傾向があるため，面積を意識させる必要があり，人数と面積の 2 量でこみぐあいを考えられるようにするため，面積を表す枠の教具を用いる。

③平均の考えを理解するために操作を取り入れる

こみぐあいを比べるために，面積に対して人を均等化しなければならない状況をつくり，子どもにプールの図と人を表すドットの数と同じ人数のチップを渡し，子どもたちが局所的な人を移動させることができるようにし，均等化の活動を視覚的に，動的に理解できるようにする。局所的に集まった人を均等化した図を図 4.4 に示す。またそのときにマスの入った面積図を使い, 均等化しやすくする。

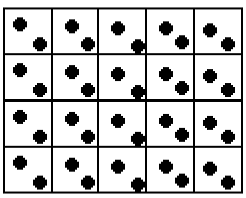


図 4.4. 均等化の図.

④比例的推論を促すために数値の記録として二重数直線を導入する

マスのある面積図に人を配置する操作をした後, 子ども用の面積を表す枠を配り, 図 4.5 にあるような二重数直線を意図的にマスのある面積図の下に用意する。さまざまな大きさの枠を面積図にあてはめて，人数と面積の関係を二重数直線に記録する。これにより，二重数直線上で要素間の関係に目が向くようになると考える。

子どもは，2 つのプールでこみぐあいを比べることを問題意識として持っているため，図 4.5 に示される，面積に対する人数を記録した二重数直線は 2 つかくことになる。人数と面積の数値を二重数直線に記録し，比較という場面を経ることで，初めは数値の記録として表現した二重数直線から，内比と外比の関係を伴った図 4.6 の二重数直線へ変わることを期待する。つまり，子どもたちが二重数直線に意味づけすることで，比例的推論が促進されると考えられる。日野（1997）は，内比は「比を構成する量が同じ測度空間を共有している場合」であるとし，外比は「異なる測度空間からの量によって構成されている比である」としている。

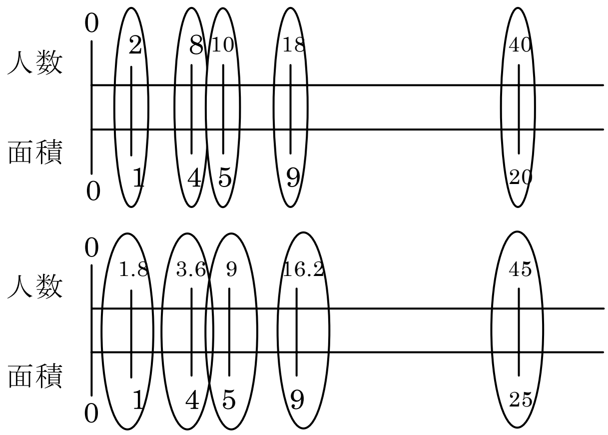


図 4.5. 数値の記録としての二重数直線.

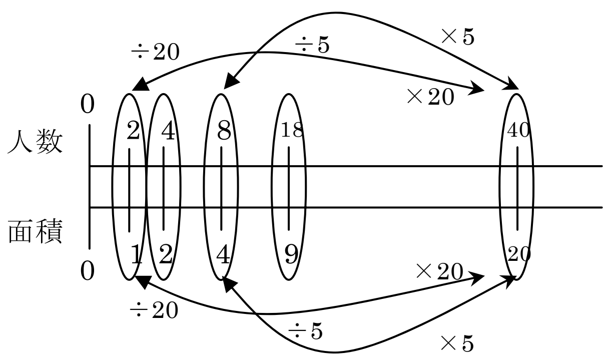


図 4.6. 子どもが意味づけをする二重数直線.

⑤分離量の問題から連続量の問題へ

分離量である人数と面積の 2 量でこみぐあいを比べる問題で二重数直線を導入した後，次頁の図 4.7 のような数値で分離量の問題から発展した連続量の問題を考える。

問：どちらの畑のほうが，じゃがいもがよくとれたでしょう？

畑	面積（m^2）	じゃがいもの重さ（kg）
A	10	27
B	15	42

図 4.7.　連続量の問題.

この問題は，ドットのように具体物として表すことはできないが，下の図 4.8 のような面積図に表すことができるので，連続量でも図 4.9 のような二重数直線を介して，問題を解決できるようになることを期待する。

2.7kg	2.7kg	2.7kg	・・・	・・・
2.7kg	2.7kg	・・・	・・・	・・・

図 4.8.　連続量における面積図.

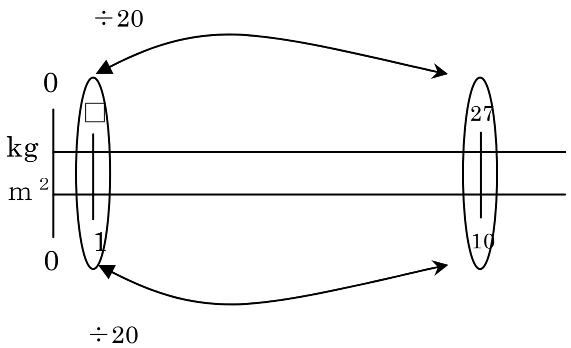


図 4.9. 連続量の問題の二重数直線.

⑥速さの問題

速さの問題(図 4.10)は，⑤の連続量の問題とは異なり，これまでのような図を介さず，問題から図 4.11 のような二重数直線を表現し，比例関係を活かし，問題を解決することが求められる。

問：下の表は短距離走の走った距離と時間を表したものです。誰が一番速いでしょう？

人	距離（m）	時間（秒）
A	80	18
B	100	20
C	80	20

図 4.10.　速さの問題.

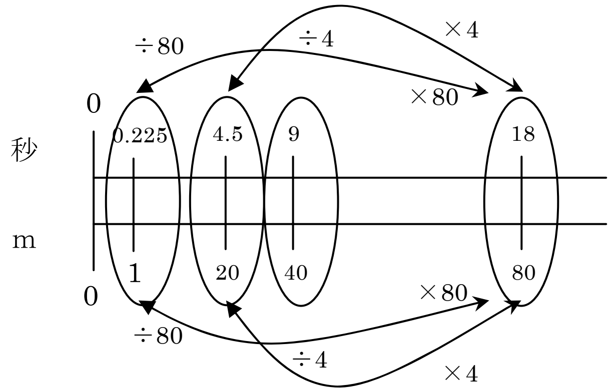


図 4.11. 速さの問題の二重数直線.

4.3. 学習過程における記号論的連鎖

本稿では，Presmeg（2006）の入れ子のモデルを活用して，学習過程の想定において考えている表現の連鎖による二重数直線を導入するプロセスが，最終的に単位量あたりの大きさの概念につながっていくのかを記号論的連鎖の観点から考えたい。Presmeg(2006)のモデルでは，記号内容を基に何らかの形で記号表現し，解釈項を生み出していく。その記号内容から解釈項を含める記号表現の 3 つの要素を，次なる抽象レベルの高い表現を表すための記号内容とする。そこで，導入問題において考えられる表現が，何を記号内容にして，記号表現し，どのように解釈していくのかを具体的に述べていく。

導入問題でこみぐあいを比べようとした問題（図 4.12）を記号内容 1 とし，問題を解決するための解釈項 1 にあたるものは，こみぐあいを比べるためには局所的に集まっている人を均等化しなければならないと解釈することである。

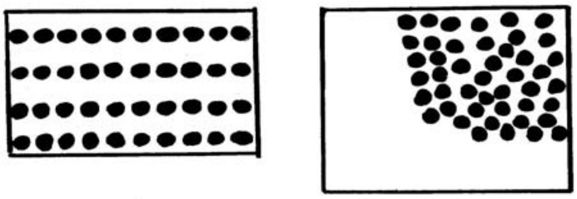


図 4.12. 導入でこみぐあいを比べる図.

記号内容 1 に対する記号表現 1 は，マスのある面積図に局所的に集まった人を，均等に配置した図 4.13 である。人を均等化した図を記号内容 2 として，さまざまな大きさの枠の教具を利用して, それぞれの枠の中の人数を求める活動を図 4.14 に示す。記号内容 2 から，枠の中の人数を二重数直線に記録して得られた，数値の記録としての二重数直線の表現が，記号表現 2 となり，図 4.15 と図 4.16 に示す。この活動を解釈項 2 にあたり，記号内容 2 から記号表現 2 と解釈項 2 を生起する。

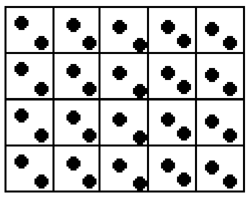


図 4.13. 均等化の図.

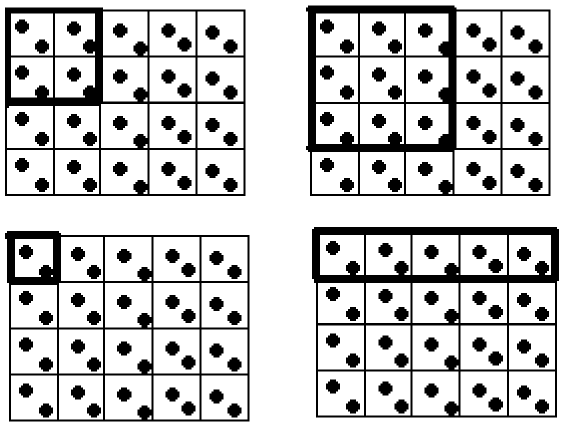


図 4.14.　枠を面積図にあてはめる活動.

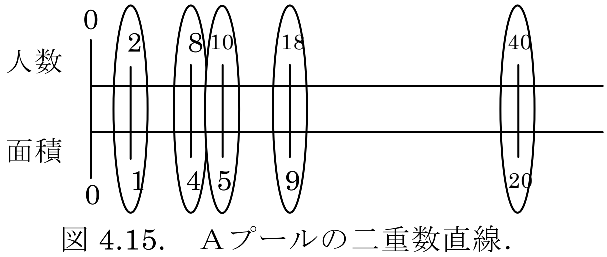


図 4.15.　Aプールの二重数直線.

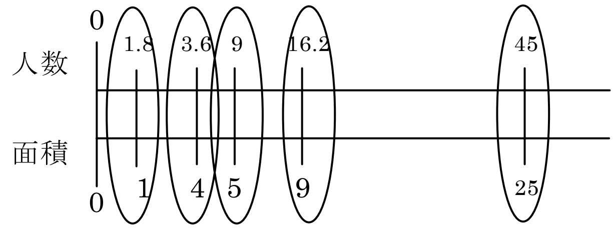


図 4.16.　Bプールの二重数直線.

数値の記録としての二重数直線利用までのプロセスを記号内容 3 として，子どもは，こみぐあいを 2 つのプールで比べることを問題意識として持っているため，記録した二重数直線でAプールとBプールにおいて，同じ面積で人数を比べる。様々な面積で比べることを通して，二重数直線の 2 量に対して一方の量を 2 倍，3 倍にすると，もう一方の量も 2 倍，3 倍になるという比例的な意味づけの解釈をする。記号内容 3 に対する記号表現 3 は図 4.17 の二重数直線となり, 表現することを通して得られる，比例的な意味づけの解釈を解釈項 3 とする。

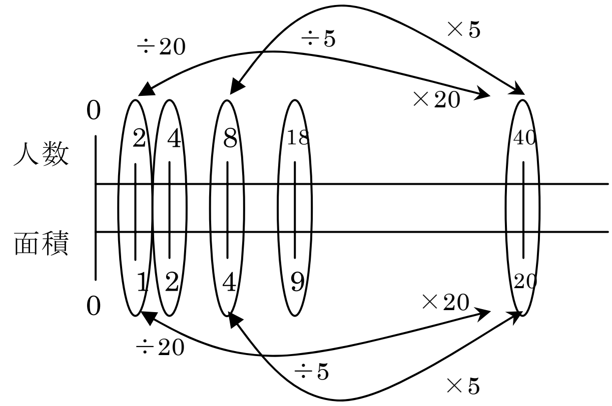


図 4.17.　内比を表現した二重数直線.

この解釈項 3 までのプロセスを，記号内容 4 として，いつでも比べられる面積はないか問うことによって，内比に着目していた意識を面積 1 あたりの人数ではいつでも比べることができ，二重数直線に新たに外比の矢印が付加された図 4.18 が記号表現 4 となる。それが人数÷面積をすることによって導くことが

できると解釈することを解釈項 4 とする。この記号表現 4 までのプロセスで，単位量あたりの大きさの概念を解釈することが可能ではないかと考える。

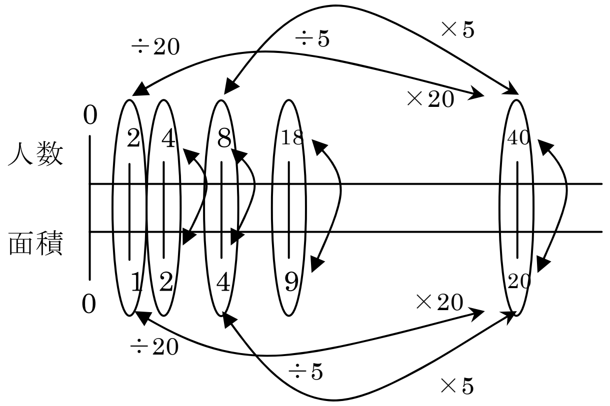


図 4.18.　外比を表現した二重数直線.

図 4.19 に学習過程の想定における記号論的連鎖の構想を示し，単位量あたりの大きさの概念までの連鎖が可能ではないかと考える。これによって速さなどの連続量である問題に対して，表や数値などを記号内容に二重数直線で表現することを通して，解釈を深め，問題解決できるのではないかと考える。

前節で想定した学習過程を Presmeg のモデルにおいて考えると，特に二重数直線に関わるプロセスであるのは, 図 4.19 において記号内容 2 からのプロセスとなる。記号内容 2 は，こみぐあいが均等化された面積図のどの部分でも同じになるという解釈項 1 を含む。その記号内容 2 を二重数直線の表現へとつなげるために，教具として枠を使用して，枠をさまざまな大きさの面積と見立て，枠の中の人数を記録する表現として二重数直線を導入する。この数値の記録としての二重数直線を，記号表現 2 とする。枠を面積図にあてる操作と枠の中の人数を数えて二重数直線に記録する活動を解釈項 2 とし，面積と人の図から，二重数直線の表現へと変えるための媒介とする。つまり，面積図における操作活動を通して表現のつながりがつけられると考える。

記号表現 2 までのプロセスが記号内容 3 となり，様々な大きさの面積の人数を子どもに問うことにより，面積が 2 倍，3 倍になると人数も 2 倍，3 倍となる関係である面積と人数の内比に着目することにより，内比を表現した二重数直線を記号表現 3 として位置づける。比例の関係を矢印で二重数直線上に記入することによって，内比を解釈することを解釈項 3 ととらえる。

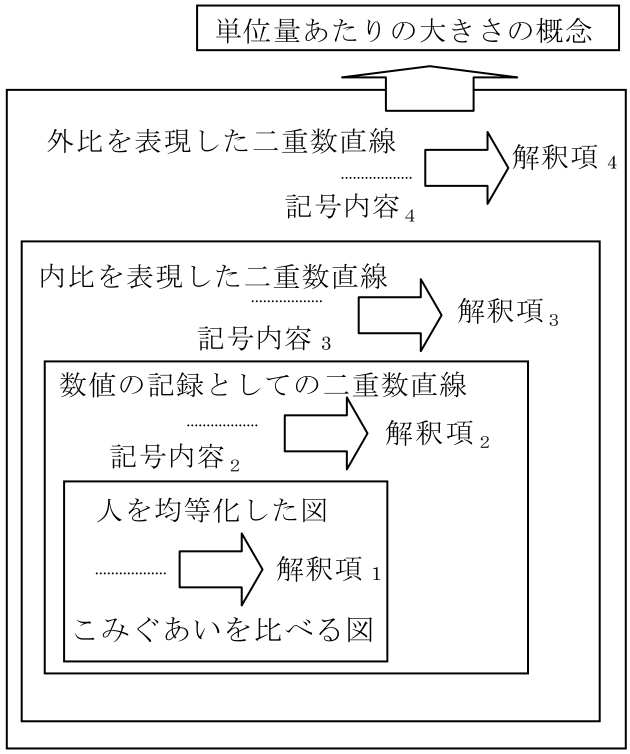


図 4.19.　記号論的連鎖の構想.

記号表現 3 までのプロセスが記号内容 4 とする。A プールと B プールの 2 つの二重数直線に対し，面積が同じであれば，どこでも比べられることに着目し，外比の関係を表現した二重数直線を記号表現 4 とする。表現を通して単位量あたりの大きさが基準となっているとなっていると解釈することを解釈項 4 ととらえる。

このプロセスから，二重数直線を記録としての二重数直線から，内比を表現した二重数直線，さらに外比を表現した二重数直線へと表現を発展させることにより，二重数直線を道具化して，単位量あたりの大きさの概念を

とらえていくことが，可能ではないかと考える。

5．おわりに

本稿では，現在の教科書の表現だけでは子どもの思考がうまくつながっていないのではないかと問題意識を持ち，記号論的連鎖を用いて学習過程を記述してきた。

今後の課題として，想定した学習過程を実施して，単位量あたりの大きさの概念を形成するために，想定した学習過程の二重数直線を介した表現の記号論的連鎖によって，表現のつながりにおけるギャップを解消することができたか，割合の概念形成のプロセスを子どもの表現や言葉などから，記号論的連鎖の視点で分析していくことが挙げられる。この際，想定した記号論的連鎖が機能するか，また記号論的連鎖をつくる上で，何が重要なポイントになるのかを明らかにすることが課題である。

引用文献

榎園高士.(1983). 関数の考え方を用いた乗法の指導（5 年　小数のかけ算）―数直線を使った指導を通して―. 日本数学教育学会誌, *65*(6), 34-38.

日野圭子.(1997a). 一人の子どもを通してみた数学的表記の内化の過程の分析―比例的推論との関わりにおいて―(Ⅰ). 日本数学教育学会誌, *79*(2), 2-10.

日野圭子.(1997b). 指導下における個人の数学的表記の意味づけに関する一考察―異種の量の除法に対する子ども T の活動の分析―. 第 30 回数学教育論文発表会, 157-162.

平林一榮.(1985). 授業を通してみた算数・数学の教育問題―小学校 5 年の「割合」を例に―. 西日本数学教育学会，第二会例会発表要項.

Saenz-Ludlow,A.(2006). Classroom interpreting games with an illustration. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 183-218.

文部科学省.(1999). 小学校学習指導要領解説算数編. 東洋館出版社.

中原忠男.(1995). 算数・数学教育における構成的アプローチの研究. 聖文社.

新堀栄.(2000). 数学的道具としての概念形成を目指した教材構成に関する研究―「単位量あたりの大きさ」を例として―. 上越数学教育研究, 15, 61-74.

白石信子.(2005). 子どもの理解に基づいた小数のわりざんの指導について―数直線への比例的な見方を通した意味の拡張―. 上越数学教育研究,20, 153-162.

田端輝彦.(2006). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, *85*(12), 3-13.

Presmeg,N.(2006). Semiotics and the "Connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 163-182.

柳健.(2006). 小学校算数の授業構成における図的表現に関する研究―認識論的三角形を視座とした授業分析を手がかりとして―. 上越数学教育研究, 22, 89-100.